

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α₁ Ορισμός 6ελ. 234

Α₂ $\alpha \rightarrow \Sigma \quad \beta \rightarrow \Sigma \quad \gamma \rightarrow \Lambda \quad \delta \rightarrow \Lambda \quad \varepsilon \rightarrow \Sigma$

Α₃ α) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\alpha}^{\beta} = -(\cos \beta - \cos \alpha) = \cos \alpha - \cos \beta$

β) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

Β₁ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$

Β₂ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)^2 - 2^2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x(\sqrt{x+3}+2)] =$
 $= 1(\sqrt{1+3}+2) = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$

Β₃ Η f συνεχής στο $x=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$\hookrightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{4} \Rightarrow \alpha = \pm 2$

ΘΕΜΑ ΓΓ₁

x_i	v_i	$f_i \%$	$x_i \cdot v_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
6	25	50	150	3	9	225
10	17	34	170	-1	1	17
15	6	12	90	-6	36	216
20	2	4	40	-11	121	242
Σύνολα	50	100	450	X	X	700

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{25}{50} = \frac{50}{100} = 50\% \text{ (ακριβώς } \frac{1}{2} \text{ τα υπόλοιπα)}$$

$$\Gamma_2 \quad \bar{x} = \frac{450}{50} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 9}$$

$$\Gamma_3 \quad \text{Μέχρι } 1000 \text{ € (10 εκατοντάδες): } f_1\% + f_2\% = 84\%$$

$$\Gamma_4 \quad \text{Διακύμανση: } s^2 = \frac{700}{50} \Rightarrow \boxed{s^2 = 14}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta_1 \quad f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' = \\ &= 2(x-2) \cdot (x-2)' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot 1 = \\ &= 2(x-2) \cdot 1 \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 = \\ &= (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = \underline{\underline{(x-2)(3x+2\alpha-2)}} \end{aligned}$$

$$\Delta_2 \quad \text{Η } f \text{ έχει ακρότατο στο } x_0 = 4 \rightarrow f'(4) = 0 \text{ (από θ. Fermat)}$$

$$\begin{aligned} f'(4) = 0 &\Rightarrow (4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (12 + 2\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot (10 + 2\alpha) = 0 \Rightarrow 10 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = \frac{-10}{2} = -5 \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = -5} \end{aligned}$$

$$\Delta_3 \quad f'(x)=0 \Rightarrow (x-2)(3x-12)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x-12=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)		Τ.Μ.	Τ.Ε.	

Στα $x=2, x=4$ η f έχει τ. ακρότατα
(ΣΤΑΣΙΜΑ)

Στο $(-\infty, 2]$ η f είναι ↗

Στο $[2, 4]$ η f είναι ↘

Στο $[4, +\infty)$ η f είναι ↗

$$\text{Τ.Μ.} \rightarrow f(2) = (2-2)^2(2-5) = 0 \cdot (-3) \Rightarrow f(2) = 0$$

$$\text{Τ.Ε.} \rightarrow f(4) = (4-2)^2(4-5) = 4 \cdot (-1) \Rightarrow f(4) = -4$$

$$\Delta_4 \quad g(x)=h(x) \Rightarrow 3x^2-12x=6x-24 \Rightarrow 3x^2-12x-6x+24=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-18x+24=0$$

$$(x^2-6x+8=0)$$

$$\hookrightarrow x_1=2 \quad \text{;} \quad x_2=4$$

$$\text{Άρα} \quad E = \int_2^4 |g(x)-h(x)| dx$$

$$\text{Παρατηρώ ότι} \quad g(x)-h(x)=f'(x)=3x^2-18x+24$$

(Το πρόβλημα της παράστασης μελετήθηκε στο Δ_3)

$$\text{Στο } [2, 4] \text{ η } f'(x)=g(x)-h(x) < 0$$

$$\text{Άρα} \quad E = - \int_2^4 (3x^2-18x+24) dx = - \int_2^4 3x^2 dx + \int_2^4 18x dx - \int_2^4 24 dx =$$

$$= - [x^3]_2^4 + [9x^2]_2^4 - 24(4-2) = - (4^3-2^3) + (9 \cdot 4^2 - 9 \cdot 2^2) - 24 \cdot 2 =$$

$$= - (64-8) + (144-36) - 48 =$$

$$= -56 + 108 - 48 = 108 - 104 = \underline{\underline{4 \text{ Τ.μ.}}}$$