

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (Α΄ΟΜΑΔΑΣ) 2014 (ημερήσια)

ΘΕΜΑ Α

A1. Μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

A2. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

A3. α) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \text{συν} x dx = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$

ΘΕΜΑ Β

B1. $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

B2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

B3. Η f συνεχής στο \mathbb{R} . Άρα η f είναι συνεχής στο $x=2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	v_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	100	30	3000	50
[35,45)	50	40	2000	25
[45,55)	40	50	2000	20
[55,65)	10	60	600	5
Σύνολα	200	-----	7600	100

Γ2. $\bar{x} = \frac{7600}{200} = 38$

Γ3. Τουλάχιστον 45 χρόνια υπηρεσίας είχε το $f_3\% + f_4\% = 25\%$ των υπαλλήλων.

Γ4. $\bar{x}' = \frac{7600 - 5 \cdot 60 - 5 \cdot 40 + 10 \cdot 30}{200 - 5 - 5 + 10} = \frac{7600 - 300 - 200 + 300}{200} = \frac{7400}{200} = 37$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (e^x)' \cdot (x-1) + (e^x) \cdot (x-1)' = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1 = f(x) + e^x$

Δ2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1) + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1+1) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x = 0$

Επομένως $\begin{cases} e^x = 0 \text{ (αδύνατη)} \\ x = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

T.E.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο $x = 0$ Τοπικό Ελάχιστο με τιμή:

$f(0) = e^0 \cdot (0-1) = 1 \cdot (-1) = -1$

Δ3. $E = \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x) + e^x| dx = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx$

Από το Δ2 ερώτημα στο $(-\infty, 0)$ ισχύει $f'(x) < 0$. Άρα στο $[-1, 0)$ ισχύει $f'(x) < 0$

Από το Δ2 ερώτημα στο $(0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) > 0$. Άρα στο $(0, 1]$ ισχύει $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_0^1 f'(x) dx = -[f(x)]_{-1}^0 + [f(x)]_0^1 = -(f(0) - f(-1)) + (f(1) - f(0)) = \\ &= -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) = -(-1) + e^{-1}(-1-1) + e^1(1-1) - (-1) = 1 - \frac{2}{e} + 1 \cdot 0 + 1 = 2 - \frac{2}{e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΛΥΣΕΩΝ:
ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΚΑΡΔΑΚΟΣ**