ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency) f_i της τιμής x_i, δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \; i = 1, 2, \ldots, \kappa.$$

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

A2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Αν το προηγούμενο όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση. Σωστή

β. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$ λάθος

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων. λάθος

δ. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς. Σωστή

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: *14, 12, 18, 4α−1, 16* με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Επειδή υπάρχουν 5 αριθμοί → Μια μεσαία παρατήρηση

Έχουμε δεδομένους τους 4 αριθμούς.

Άρα ο 5ος είναι ο 15.

$$4\alpha-1=15 \Rightarrow 4\alpha=15+1 \Rightarrow 4\alpha=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{16}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha=4}$$

Β2. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2).

12, 14, 15, 16, 18

$$\bar{x}=\frac{12+14+15+16+18}{5}=\frac{75}{5} \Rightarrow \boxed{\bar{x}=15}$$

$$s^2=\frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{5}=$$

$$=\frac{9+1+0+1+9}{5}=\frac{20}{5} \Rightarrow \boxed{s^2=4}$$

B3. Για $\alpha=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

$s^2=4$ Άρα $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{s=2}$

$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{15}=0,133\ldots$ $\boxed{CV=13,33..\%}$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές (γιατί $CV>10\%$)

B4. Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

$\boxed{x_i'=-2\cdot x_i+5}$

Άρα $\bar{x}'=-2\cdot\bar{x}+5=-2\cdot 15+5=-30+5 \Rightarrow \boxed{\bar{x}'=-25}$

$s'=|-2|\cdot s=2\cdot 2 \Rightarrow \boxed{s'=4}$

$CV'=\frac{s'}{|\bar{x}'|}=\frac{4}{|-25|}=\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=0,16$ ή $\boxed{CV'=16\%}$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Εφαπτομένη: $y = \lambda x + \beta$ // άξονα $x'x$

Άρα $\boxed{\lambda = 0}$

$\boxed{\lambda = f'(1)}$

$f'(x) = (2x^3)' - (3\kappa x^2)' + (\kappa)' = 6x^2 - 6\kappa x$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 6 \cdot \kappa \cdot 1 = 0 \Rightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Rightarrow 6 = 6\kappa \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa = \frac{6}{6} \Rightarrow \boxed{\kappa = 1}$

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Άρα μελετάω την $f'(x)$ ως προς τα ακρότατα.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (6x^2)' - (6x)' = 12x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow 12x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{12} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	T.E.	↗

Για $\boxed{x = \frac{1}{2}}$, ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ $(f'(x))$ γίνεται ελάχιστος.

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

εξίσωση: $y = \lambda x + \beta$

$\lambda = (f'(-1))' = f''(-1)$

$\boxed{f''(x) = 12x - 6}$ Άρα $\lambda = f''(-1) = 12\cdot(-1) - 6 \Rightarrow \boxed{f''(-1) = -18}$

$y = f'(-1) = 6\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 6 + 6 \Rightarrow \boxed{y = f'(-1) = 12}$

$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 12 = -18\cdot(-1) + \beta \Rightarrow 12 = 18 + \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 - 18 = \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -6}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\boxed{y = -18\cdot x - 6}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' + (2018)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (x^2+4)' + 0 =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μελέτη f: $f(x)=\sqrt{x^2+4}+2018$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Τ.Ε.	↗

Στο $(-\infty,0)$ η $f'(x)<0$. Άρα στο $(-\infty,0]$ η f είναι γν. φθίνουσα.

Στο $(0,+\infty)$ η $f'(x)>0$. Άρα στο $[0,+\infty)$ η f είναι γν. αύξουσα.

Στο $x=0$ η f έχει Τ.Ε.

Τ.Ε. $\rightarrow f(0)=\sqrt{0^2+4}+2018=\sqrt{4}+2018=2+2018 \Rightarrow \boxed{f(0)=2020}$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\frac{0}{0}\ (\text{Απροσδ.})$$

$$\frac{(x^2+4)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\frac{x\cdot\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}-2\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}-2}{x}=\frac{\frac{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}-2}{x}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{\sqrt{0^2+4}+2}=\frac{0}{4}=0$$