ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 28 σχολικό βιβλίο
Α2. Ορισμοί σελ. 59 σχολικό βιβλίο
Α3. α→Λάθος
β→Σωστό
γ→Λάθος
δ→Λάθος
ε→Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{s}{CV} = \frac{\sqrt{s^2}}{CV} = \frac{\sqrt{4}}{0,2} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \bar{x} = 10$

Β2. $\bar{x} = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$

Β3. Οι τιμές σε αύξουσα σειρά: 7, 8, 10, 11, 11, 13
ν=6 (άρτιος) Μεσαίες παρατηρήσεις: $3^{η}$ →10 και $4^{η}$ →11

$$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

$$R = t_{MAX} - t_{MIN} = 13 - 7 = 6$$

Β4. $x_i' = x_i - 2$ Άρα: $\bar{x}' = \bar{x} - 2$ και $s' = s$

Επομένως: $CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{s}{\bar{x}-2} = \frac{2}{10-2} = \frac{2}{8} = 0,25$ ή 25%

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, γιατί CV>10%.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot \left(x^2-2x+10\right)' =$

$$= \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{2\left(x-1\right)}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\ .$$

Γ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Ε.	

Τ.Ε. → $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot 1+10}=\sqrt{9}=3$

Από ορισμό Τ.Ε. $f(x)\geq Τ.Ε. \Rightarrow f(x)\geq f(1) \Rightarrow f(x)\geq 3$.

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης: y=λx+β

$$\lambda=f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$$

$$y=f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}=\sqrt{25}=5$$

$$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow 5=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow 5-4=\beta \Leftrightarrow \beta=1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y=\dfrac{4}{5}\cdot x+1$

Γ4. Σημείο Α (σημείο τομής με τον άξονα x’x) → y = 0

$$y=\frac{4}{5}\cdot x+1 \overset{y=0}{\Rightarrow} 0=\frac{4}{5}\cdot x+1 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}\cdot x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

Άρα το σημείο Α είναι το: $A\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$

Σημείο Β (σημείο τομής με τον άξονα y’y) → x = 0

$$y=\frac{4}{5}\cdot x+1 \overset{x=0}{\Rightarrow} y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1$$

Άρα το σημείο Β είναι το: $B(0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για λ = 3, $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$$f'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(3x\right)'=3x^2-6x+3.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’(x)	+	0	+
f(x)	↗		↗

Οι τιμές $x_1=\frac{3}{8}$ και $x_2=\frac{5}{6}$, ανήκουν στο διάστημα $(-\infty,1]$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $\frac{3}{8}<\frac{5}{6} \overset{f\text{ γν. αύξουσα}}{\rightarrow} f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Δ2. $$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-6x+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3\left(x^2-2x+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2\right]\cdot x(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\cdot x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}=\frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{1}=3\cdot2=6$$

Δ3. Ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης. Άρα μελέτη ως προς τα ακρότατα της παραγώγου της f.

$f'(x)=3x^2-6x+3$ $\qquad\qquad (f'(x))'=f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f ’’(x)	-	0	+
f ‘(x)	↘		↗
		T.E.	

Για x = 1 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f γίνεται ελάχιστος.

$y=f(1)=1^3-3\cdot1^2+3\cdot1 \Leftrightarrow y=1$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: (1, 1).

Δ4. Για να μην παρουσιάζει η f ακρότατα θα πρέπει η f ’(x) να μην αλλάζει πρόσημο.

Επειδή η f ‘ (x) είναι δευτεροβάθμια παράσταση, θα πρέπει η εξίσωση

$f'(x)=0$ να έχει διακρίνουσα $\Delta \le 0$.

$f'(x)=3x^2-6x+\lambda=0$

$$\Delta \le 0 \Leftrightarrow (-6)^2-4\cdot 3\cdot \lambda \le 0 \Leftrightarrow 36-12\lambda \le 0 \Leftrightarrow \frac{36}{12} \le \lambda \Leftrightarrow \lambda \ge 3$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του λ για να μην έχει ακρότατα η f είναι $\lambda = 3$.