

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$. *Λάθος*

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα. *Σωστό*

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και n το μέγεθος του δείγματος. *Λάθος*

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$ *$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$*

β. $(\sqrt{x})' = \dots$ *$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x > 0$*

γ. $(\sin x)' = \dots$ *$\cos x$*

Μονάδες 9

A4. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h$.

Επομένως, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$.

Άρα $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο. $\rightarrow$ Άρα $f_1\% = 40\%$

B1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 90\% - 70\% = 20\%$$

$$\text{Άρα } v = \frac{v_3}{f_3} = \frac{10}{0,2} = \frac{100}{2} \Rightarrow v = 50$$

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,4 \cdot 50 = 20$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 70\% - 40\% = 30\%$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,3 \cdot 50 = 15$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 50 - 45 = 5$$

B2. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

$$f_4 = 10\%$$

B3. Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

$$v_2 + v_3 + v_4 = 30 \text{ μαθητές}$$

B4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% = F_3\% = 90\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

- Γ1.** Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

Μονάδες 4

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2 \Rightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 - \lambda + 2 &= -2 \Rightarrow -1 + 2 + 2 = \lambda \Rightarrow \boxed{3 = \lambda} \end{aligned}$$

- Γ2.** Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (2)' = 3x^2 - 6x + 0 = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' - (6x)' = 6x - 6$$

- Γ3.** Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Μελετάμε ως $f(x)$ ως προς τη μονοτονία για ακρότατα.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	+	$\Sigma_{\infty} (-\infty, 0) f'(x) > 0$. Άρα στο $(-\infty, 0]$ η f $\nearrow$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\Sigma_0 (0, 2) f'(x) < 0$. Άρα στο $[0, 2]$ η f $\searrow$
		T.M.	T.E.		$\Sigma_2 (2, +\infty) f'(x) > 0$. Άρα στο $[2, +\infty)$ η f $\nearrow$

Δύο ακροτάτων: $x = 0$, $x = 2$ (Γιατί εκεί μηδενίζεται η παράγωγος)

$\Sigma_{\infty} (-\infty, 0) f'(x) > 0$ ή στο $(0, 2)$ η $f'(x) < 0$. Άρα η f έχει στο $x = 0$ T.M.

$$\underline{\text{T.M.}} \quad f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = \underline{\underline{2}}$$

$\Sigma_2 (0, 2) f'(x) < 0$ ή στο $(2, +\infty)$ η $f'(x) > 0$. Άρα η f έχει στο $x = 2$ T.E.

$$\underline{\text{T.E.}} \quad f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = \underline{\underline{-2}}$$

- Γ4.** Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \frac{0}{0}$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ διπλό ρίζα})$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-1)}{6(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{6} = \frac{3 \cdot (1-1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

ΘΕΜΑ ΑΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}.$$

Α1. Να δείξετε ότι

$$f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2).$$

Μονάδες 5

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x^2 + 4x + 5)^{20} \right]' = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = \\ &= 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) = \\ &= 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2 \cdot (x + 2) = \\ &= 40 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2) \end{aligned}$$

Α2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}.$$

Μονάδες 4

ορίσμοι παραγώγου στο $x = -2 \rightarrow f'(-2) =$

$$\begin{aligned} &= 40((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{19}(-2 + 2) = \\ &= 40(4 - 8 + 5)^{19} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Α3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y = 1$.**Μονάδες 8**εφαπτομένη: $y = \lambda x + \beta$ παράλληλη στον άξονα $x'x \rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

$$\lambda = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow 40 \cdot (x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 4x_0 + 5 = 0 & (\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4) \\ x_0 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = -2} \end{cases}$$

4 Δίνονται

Άρα στο $x_0 = -2$ η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

$$y = f(-2) = ((-2)^2 + 4(-2) + 5)^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 1 = 0 \cdot (-2) + \beta \Rightarrow 1 = \beta$$

Άρα η εφαπτομένη της f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

$$\text{είναι η: } y = 0 \cdot x + 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Α4. Θεωρούμε σημείο $A(x, 1)$ της ευθείας $y = 1$ με $x > 0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x, 1)$ και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x = 1$.**Μονάδες 8**

$$\text{Απόσταση } OA: \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Έστω } g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ ο ρυθμός της απόστασης}$$

$$\text{Ρυθμός Μεταβολής: } g'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$