ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑ.Λ.
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *με* $\kappa \le \nu$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, όπου $i = 1, 2, ..., \kappa$;

Μονάδες 4

Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων. (Σελίδα 65 Σχολικό Βιβλίο)

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$**

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

(Σελίδα 98 Σχολικό Βιβλίο)

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

Άρα $\quad \mathbf{(c)' = 0}$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β). ΛΑΘΟΣ

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής. ΣΩΣΤΟ

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. ΛΑΘΟΣ

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

β. $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Αφού η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ $(y=0)$ στο $x=1$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{f(1)=0}$

$f(1)=0 \Rightarrow 1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \Rightarrow 1-\alpha+2=0 \Rightarrow 3-\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=3}$

Β2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2-1} \longrightarrow g(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

Θα πρέπει: $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{x \neq \pm 1}$

Άρα : $\boxed{A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)}$

B3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Μονάδες 7

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \dots = \left(\frac{0}{0}\right) \text{(Απροσδιοριστία)}$$

Παραγοντοποίηση Αριθμητή: $x^2-3x+2 = 1\cdot(x-1)(x-2) = \boxed{(x-1)(x-2)}$

(Η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ έχει λύσεις: $x_1=1$, $x_2=2$)

Παραγοντοποίηση Παρονομαστή: $x^2-1 = x^2-1^2 = \boxed{(x-1)(x+1)}$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

B4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

$\boxed{f(x) = x^2-3x+2}$ $\quad f'(x) = (x^2)'-(3x)'+(2)' \rightarrow \boxed{f'(x) = 2x-3}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή:

$$\boxed{y = \lambda x+\beta}$$

$\lambda = f'(0) = 2\cdot 0-3 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$

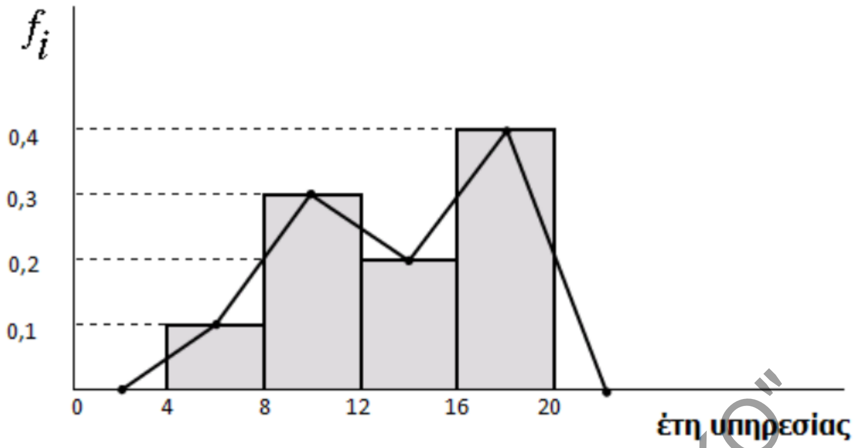
$y = f(0) = 0^2-3\cdot 0+2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

$y = \lambda x+\beta \Rightarrow 2 = -3\cdot 0+\beta \Rightarrow \boxed{2 = \beta}$

Άρα η εφαπτομένη είναι: $\boxed{y = -3x+2}$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)	6	5	0,1	36°
[8,12)	10	15	0,3	108°
[12,16)	14	10	0,2	72°
[16,20)	18	20	0,4	144°
Σύνολο		50	1,0	360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

$x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} \rightarrow x_1 = 6$ (ομοίως κ΄ τα υπόλοιπα)

$v_2 = f_2 \cdot v = 0,3 \cdot 50 \rightarrow v_2 = 15$

$v_3 = f_3 \cdot v = 0,2 \cdot 50 \rightarrow v_3 = 10$

$a_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,3 \cdot 360^\circ \rightarrow a_2 = 108^\circ$

$a_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,2 \cdot 360^\circ \rightarrow a_3 = 72^\circ$

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

$\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 20 = \boxed{45 \text{ εκπαιδευτικοί}}$

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

$f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6$ ή $\boxed{60\% \text{ των εκπαιδευτικών}}$

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

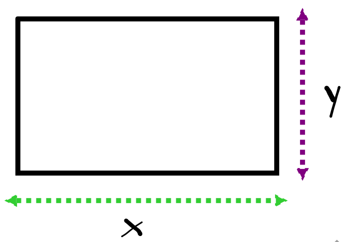
Από θεωρία $\longrightarrow$ Εμβαδό (χωρίου ανάμεσα στο πολύγωνο f_i κ' τον οριζ. άξονα) $= \Sigma f_i = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10



Περίμετρος: $2x + 2y = 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x+y) = 80 \Rightarrow \boxed{x+y=40}$

Εμβαδό: $\boxed{x \cdot y}$

$y = 40 - x$

(από εδώ συμπεραίνουμε ότι καμιά διάσταση του ορθογωνίου δεν μπορεί να "ξεπεράσει" τα 40 m $\rightarrow$ $\boxed{0 < x, y < 40}$)

Άρα Εμβαδό: $\boxed{E(x) = x \cdot (40 - x) = -x^2 + 40x}$ (m^2)

(με $\boxed{0 < x < 40}$ αφού $x + y = 40$ m)

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

$E(x) = -x^2 + 40x \ (m^2)$ $\qquad$ $E'(x) = -(x^2)' + (40x)' = -2x + 40 \ \ m^2/m$

$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 40 = 0 \Rightarrow -2x = -40 \Rightarrow x = \frac{-40}{-2} \Rightarrow \boxed{x = 20\,m}$

x	$-\infty$ … 0	0 … 20	20 … 40	40 … $+\infty$
$E'(x)$		$+$	0 $-$	
$E(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	

($E'(x) > 0 \longrightarrow 0 < x < 20$)

($E'(x) < 0 \longrightarrow 20 < x < 40$)

Η $E(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $(0, 20]$

Η $E(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $[20, 40)$

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

x	$-\infty$ … 0	0 … 20	20 … 40	40 … $+\infty$
$E'(x)$		$+$	0 $-$	
$E(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	

Μέγιστο

θέσεις ακροτάτων: $x = 20$

(γιατί εκεί μηδενίζεται η $E'(x)$)

$\boxed{\text{Για } x = 20\,m}$ η $E(x)$ παρουσιάζει Μέγιστο την τιμή:

$$\boxed{E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400 \ m^2}$$

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5\text{m}$ και $x_B = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

(Πρόκειται για ερώτημα ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ $E(29,5)$ με $E(34,2)$)

Παρατηρώ ότι: $x_A = 29,5\,m$ κ' $x = 34,2m$ ανήκουν στο διάστημα $[20,40)$ (στο οποίο η $E(x)$ είναι ↘)

Ισχύει: $29,5 < 34,2 \xRightarrow{H\ f\ \searrow} E(29,5) > E(34,2)$

Άρα το οικόπεδο Α έχει μεγαλύτερο εμβαδό από το οικόπεδο Β.