ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h(2x+h)$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Επομένως:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

Άρα $(x^2)' = 2x$

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης. λάθος

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Σωστό

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς. λάθος

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \cdots \frac{1}{2\sqrt{x}}$

β. $(f(g(x)))' = \cdots \longrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:
25, 10, 5, 20, 15.

Β1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

$$\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} \Rightarrow \boxed{\bar{x}=15}$$

$$R = x_{MAX} - x_{MIN} = 25-5 \Rightarrow \boxed{R=20}$$

Β2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2.

Μονάδες 7

$$s^2 = \frac{(25-15)^2+(10-15)^2+(5-15)^2+(20-15)^2+(15-15)^2}{5} =$$

$$= \frac{10^2+(-5)^2+(-10)^2+5^2+0^2}{5} = \frac{100+25+100+25}{5} = \frac{250}{5} \Rightarrow \boxed{s^2=50}$$

Β3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{s=5\sqrt{2}}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}46 \text{ ή } 46\%$$

Το δείγμα είναι ανομοιογενές, γιατί $CV > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

$$f'(x) = (x^3)' - (9x^2)' + (\alpha x)' + (1)' = 3x^2 - 18x + \alpha$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3\cdot 1^2 - 18\cdot 1 + \alpha = 0 \Rightarrow 3 - 18 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 18 - 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 15}$$

Γ2. Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

$$\lambda = f'(x_0) = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 18\cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = 27 - 36 \Rightarrow \boxed{\lambda = -9}$$

$$y = f(x_0) = f(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 15\cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 39 - 36 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 3 = -9\cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 + 18 = \beta \Rightarrow \beta = 21$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\boxed{y = -9\cdot x + 21}$

Γ3. Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ (Ν εξέτασ ως προς μονοτονία-ακρότατα)

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$(\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-(-6)+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6+4}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\[2ex] \dfrac{-(-6)-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6-4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Στο $(-\infty, 1)$ $f'(x) > 0 \rightsquigarrow$ Στο $(-\infty, 1]$ η f ↗

Στο $(1, 5)$ $f'(x) < 0 \rightsquigarrow$ Στο $[1, 5]$ η f ↘

Στο $(5, +\infty)$ $f'(x) > 0 \rightsquigarrow$ Στο $[5, +\infty)$ η f ↗

Στο $x = 1$ η f έχει Τ.Μ.: $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 1 = 1 - 9 + 15 + 1 = 17 - 9 = 8$

$\boxed{\text{Τ.Μ.} \longrightarrow f(1) = 8}$

Στο $x = 5$ η f έχει Τ.Ε.: $f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = 125 - 225 + 75 + 1 = 201 - 225 = -24$

$\boxed{\text{Τ.Ε.} \longrightarrow f(5) = -24}$

Γ4. Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 18x + 15}{x^2 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot (x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3(1-5)}{1+1} = \frac{-12}{2} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ (μον. 4).

Μονάδες 6

Πρέπει $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ Άρα $\boxed{A_f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)'\cdot(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}}$$

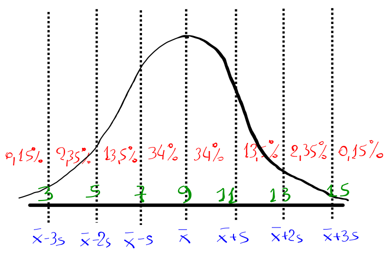
Δ2. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} \quad , \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Μονάδες 6



$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 9}$$

$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$s = \frac{1}{2f'(1)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{s = 2}$$

Δ3. Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

διάστημα $(5,11)$: $13{,}5\% + 34\% + 34\% = 81{,}5\%$

$\boxed{\text{Μαθητές} \longrightarrow 0{,}815\cdot\nu = 0{,}815\cdot 2000 = 1630}$

Πάνω από 15 : $0{,}15\%$

$\boxed{\text{Μαθητές} \longrightarrow 0{,}0015\cdot\nu = 0{,}0015\cdot 2000 = 3}$

Δ4. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Μονάδες 4

Αύξηση κατά 3 λεπτά. Άρα: $\bar{x}' = \bar{x} + 3 = 9 + 3 \Rightarrow \boxed{\bar{x}' = 12 \text{ λεπτά}}$

$\boxed{s' = s = 2 \text{ λεπτά}}$