

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑ.Λ.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΘΕΜΑ Α**A1.** (απόδειξη σχολικού βιβλίου)Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε:

$$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$$

Και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x)$$

$$\text{Άρα } (cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

A2.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Αν το προηγούμενο όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

A3. $\alpha \rightarrow$ Λάθος, $\beta \rightarrow$ Σωστό, $\gamma \rightarrow$ Σωστό, $\delta \rightarrow$ Λάθος, $\varepsilon \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = (2x^3)' + (\alpha x^2)' - (12x)' + (10)' = 6x^2 + 2\alpha x - 12$

B2. Η εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της στο $x = 1$ είναι μηδέν:

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = 12 - 6 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

B3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$ $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	o	-	o	+
$f(x)$					
	T.M.			T.E.	

Στο $(-\infty, -2]$ η f γν.Αύξουσα.

Στο $[-2, 1]$ η f γν.Φθίνουσα.

Στο $[1, +\infty)$ η f γν.Αύξουσα.

Τ.Μ.: $f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 = -16 + 12 + 24 + 10 = 30$

Τ.Ε.: $f(-1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 2 + 3 - 12 + 10 = 3$

B4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \dots = 6(1+2) = 18$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $c = 12 - 8 = 4$, οι υπόλοιπες κεντρικές τιμές είναι όπως φαίνονται στον πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	v_3	$18v_3$
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	$40+v_3$	$520+18v_3$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18v_3}{40 + v_3} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \Leftrightarrow$$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Leftrightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow$$

$$v_3 = \frac{40}{4} \Leftrightarrow v_3 = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i (x_i - \bar{x})^2$
[8,12)	10	20	200	-4	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0	0
[16,20)	18	10	180	4	16	160
[20,24)	22	5	110	8	64	320
Σύνολο		50	700			800

Γ3. $s^2 = \frac{\sum v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{800}{50} = 16$

Γ4. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$ $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > 0,1$ Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές, γιατί $CV > 10\%$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{0 - 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ (αδύνατη) για κάθε } x \neq 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$			

Στο $(-\infty, 0)$ η f γν.Φθίνουσα.

Στο $(0, +\infty)$ η f γν.Αύξουσα.

Δ2. Στο $[-4, -1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

$$-4 \leq x \leq -1 \rightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1)$$

$$f(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16} \quad f(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Η εφαπτομένη $y = \lambda x + \beta$. $\lambda = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$$y = f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -1 - 2 = \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $y = 2x - 3$.

Δ4. $\bar{x} = 4$ $s_x = 2$. Οι τεταγμένες δίνονται από τον τύπο: $y_i = 2x_i - 3$

Άρα $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 \Leftrightarrow \bar{y} = 5$

$$s_y = |2|s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ ή } 80\%$$