

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΑΛΓΕΒΡΑΣ) Γ'ΕΠΑ.Λ.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025 – ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Έστω $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ οι μεταβλητές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n με μέση τιμή $\bar{x}$. Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών, δηλαδή

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = \frac{\sum (t_i - \bar{x})}{n}$$

Είναι ίσος με μηδέν.

Έχουμε:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Α2.

Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α3. $\alpha \rightarrow$ Λάθος , $\beta \rightarrow$ Σωστό , $\gamma \rightarrow$ Σωστό , $\delta \rightarrow$ Σωστό , $\epsilon \rightarrow$ Λάθος

Α4. $\alpha. (c)' = 0$, $\beta. (x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

x_i	n_i	$f_i\%$	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολα	50	100		85

$$v_1 = v - (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = 50 - 40 = 10$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ ή } 20\%, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{15}{50} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{11}{50} = 0,22 \text{ ή } 22\%, \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{50} = 0,16 \text{ ή } 16\%$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{50} = 0,12 \text{ ή } 12\%$$

$$N_1 = v_1 = 10, \quad N_2 = N_1 + v_2 = 10 + 15 = 25, \text{ κ.ο.κ}$$

$$\text{B2. } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{85}{50} = \frac{170}{100} = 1,7 \text{ ώρες}$$

B3. $v=50$ (άρτιος) . Άρα έχουμε 2 μεσαίες παρατηρήσεις, την 25^η και την 26^η . Από την στήλη N_i , η 25^η παρατήρηση ανήκει στην τιμή «1» και η 26^η παρατήρηση ανήκει στην τιμή «2».

$$\delta = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ ώρες}$$

B4. α. Το πολύ 3 ώρες: $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$

β. $y_i = x_i + 4$ άρα $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$ ώρες

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } f'(x) = (-2x^3)' + (6x^2)' + (a)' = -6x^2 + 12x + 0 = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 6x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Στο $(-\infty, 0)$ η $f'(x) < 0$. Άρα στο $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $(0, 2)$ η $f'(x) > 0$. Άρα στο $[0, 2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο $(2, +\infty)$ η $f'(x) < 0$. Άρα στο $[2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Στο $x = 0$ η f παρουσιάζει Τ.Ελάχιστο με τιμή:

$$f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + a = a$$

Στο $x = 2$ η f παρουσιάζει Τ.Μέγιστο με τιμή:

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + a = -16 + 24 + a = 8 + a$$

Ισχύει:

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow a + a + 8 = 2 \cdot (-8) \Leftrightarrow 2a + 8 = -16 \Leftrightarrow 2a = -24 \Leftrightarrow a = -12$$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = \lambda x + \beta$, όπου:

$$\lambda = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$$

$$y = f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + a = -2 + 6 - 12 = 6 - 14 = -8$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow -8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -8 - 6 = \beta \Leftrightarrow \beta = -14$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: **$y = 6x - 14$** .

Γ4. Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f παρουσιάζει Τ.Μέγιστο με τιμή:

$$f(2) = 8 + a = 8 - 12 = -4$$

$$\begin{aligned} \text{Ορισμός Τ. Μεγίστου: } f(x) \leq TM &\Leftrightarrow f(x) \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2(x^3 - 3x^2 + 4) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\left(f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (\lambda x^2)' + (7x)' + \left(\frac{2}{3} \right)' = x^2 + 2\lambda x + 7 \right)$$

Δ2. Έχουμε $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7 = x^2 - 8x + 7$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 \quad x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7 \\ \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Στο $(-\infty, 1)$ η $f'(x) > 0$. Άρα στο $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο $(1, 7)$ η $f'(x) < 0$. Άρα στο $[1, 7]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $(7, +\infty)$ η $f'(x) > 0$. Άρα στο $[7, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Πρόσημο παράστασης $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$

$x=2025$ και $x=2020$ ανήκουν στο $[7, +\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει $2025 > 2020$, άρα από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης θα έχουμε: $f(2025) > f(2020) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$

$x = \frac{3}{2}$ και $x = \frac{5}{2}$ ανήκουν στο $[1, 7]$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ισχύει $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$, άρα από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης θα έχουμε: $f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

Επομένως: $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$. Άρα η παράσταση έχει

θετικό πρόσημο.

Δ4. $f'(x) = x^2 - 8x + 7$ $f''(x) = \dots = 2x - 8$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} =$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 100 - 64 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{10-6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \quad x^2 - 10x + 16 = 1(x-2)(x-8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})] =$$

$$= (2-8)(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = (-6)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = (-6)(2\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$$