ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑ.Λ.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. (απόδειξη σχολικού βιβλίου)

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Α2.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της f και συμβολίζεται με f'**.

Α4. α→Λάθος, β→ Σωστό, γ→Σωστό, δ→ Λάθος, ε→Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(x^2\right)' - \left(3x\right)' + \left(1\right)' = x^2 - 2x - 3 + 0 = x^2 - 2x - 3$

Β2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \qquad f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = \left(-2\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-3\right) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Στο $(-\infty,-1]$ η f γν.Αύξουσα.

Στο $[-1,3]$ η f γν.Φθίνουσα.

Στο $[3,+\infty)$ η f γν.Αύξουσα.

Τ.Μ.

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3}$$

Τ.Ε. $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = 9 - 18 + 1 = -8$

Β3. Η εφαπτομένη έχει την εξίσωση: $y = \lambda x + \beta$, όπου :

$$\lambda = f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$y_0 = f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$y_0 = \lambda x_0 + \beta \Leftrightarrow 1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow 1 = \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y = -3x + 1$

Β4. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f'(x)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1} = -1 - 3 = -4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \kappa = 28 - 23 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

Γ2. Οι αριθμοί σε αύξουσα σειρά: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7. Το μέγεθος του δείγματος είναι περιττός αριθμός, οπότε μεσαία παρατήρηση είναι η **4$^{\eta}$** , δηλαδή το **4**. $\boxed{\delta = 4}$

Γ3. $$s^2 = \frac{(0-4)^2+(3-4)^2+2\cdot(4-4)^2+2\cdot(5-4)^2+(7-4)^2}{7} =$$

$$= \frac{16+1+2\cdot 0+2\cdot 1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ ή 50%

Το δείγμα είναι ανομοιογενές, γιατί CV>10%.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το εμβαδό ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$

Η περίμετρος δίνεται: $\Pi = 2x + 2y \Rightarrow \Pi(x) = 2x + 2\cdot\frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$

(Για x>0)

Δ2. $\Pi'(x) = (2x)' + \left(\frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2-200}{x^2}$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
$\Pi'(x)$			0		‖	−	0	+	
$\Pi(x)$					‖	↘		↗	
							Τ.Ε.		

Στο $(0,10]$ η Π(x) είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $[10,+\infty)$ η Π(x) είναι γνησίως αύξουσα.

Για x = 10m η περίμετρος γίνεται ελάχιστη.

Έχουμε: $y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} \Rightarrow y = 10\,m.$

Παρατηρώ ότι x=y=10m , άρα το ορθογώνιο έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι τετράγωνο.

$\boxed{\textbf{Δ3.}}$ Η Π(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,10\right]$.

Είναι: $x_1 < x_2 \overset{\text{Η f είναι γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Rightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$. Άρα $A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \left(\frac{+}{-} = -\right)$

$\boxed{\textbf{Δ4.}}$

$$\lim_{x\to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x\to 10} \frac{\frac{2x^2 - 200}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x\to 10} \frac{2x^2 - 200}{x^2\left(\sqrt{10x} - 10\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 10} \frac{2\left(x^2 - 100\right)\left(\sqrt{10x} + 10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x} - 10\right)\left(\sqrt{10x} + 10\right)^*} =$$

$$^* \left(\sqrt{10x} - 10\right)\left(\sqrt{10x} + 10\right) = \left(\sqrt{10x}\right)^2 - 10^2 = 10x - 100 = 10\left(x - 10\right)$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2\left(x - 10\right)\left(x + 10\right)\left(\sqrt{10x} + 10\right)}{x^2 \cdot 10\left(x - 10\right)} = \lim_{x\to 10} \frac{2\left(x + 10\right)\left(\sqrt{10x} + 10\right)}{10x^2} =$$

$$= \frac{2\left(10 + 10\right)\left(\sqrt{10 \cdot 10} + 10\right)}{10 \cdot 10^2} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 20}{1000} = \frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$